Abschnitts sprechen also für die von LEE und YANG [15] im Zusammenhang mit den τ-Mesonen vertretene These, daß die Parität beim radioaktiven Zerfall nicht allgemein erhalten bleibt.

c) *Einordnung der Leptonen*

Die Leptonen scheinen mit den schwereren Elementarteilchen nicht durch eine starke Wechselwirkung verbunden zu sein; aber jedenfalls gibt es die durch die elektromagnetischen Kräfte hervorgerufene Paarerzeugung der Elektronen und wohl auch der μ-Mesonen. Daraus geht hervor, daß die Grundgleichungen der Materie — auch bei Vernachlässigung der schwachen Wechselwirkungen — die Leptonen in ihrem Massenspektrum enthalten müssen. Auch die relativ große Masse des μ-Mesons spricht dafür, daß die großen Wechselwirkungen für die Massen der Leptonen in erster Linie verantwortlich sind. Dies muß bedeuten, daß die Abschließung der Leptonen von den schwereren Elementarteilchen durch weitere Auswahlregeln und Übergangsverbote bewirkt wird, die bisher noch nicht formuliert worden sind. Es mag sein, daß man zur Darstellung der Leptonen noch eine weitere Wellenfunktion in die Grundgleichungen einführen muß; vielleicht bringt aber auch eine nähere Untersuchung der durch den HILBERT-Raum II in die Theorie eingeführten Züge weitere Symmetrieeigenschaften ans Licht, die zur Deutung jener Auswahlregeln genügen.

[15] T. D. LEE u. C. N. YANG, Phys. Rev. **102**, 290 [1956].

Kernpolarisation und Ebbe-Flut-Effekt beim μ^--Meson-Atom

Von E. NUDING

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **12 a**, 187—194 [1957]; eingegangen am 6. Dezember 1956)

Der Einfluß der Polarisation des Atomkerns auf die 1s-, 2p- und 3d-Energieniveaus des μ^--Meson-Atoms wird im Rahmen einer Störungsrechnung II. Ordnung unter Zugrundelegung des STEINWEDEL—JENSENschen Kernmodells für die Elemente Sb, W, Pb, U berechnet. Die Ergebnisse (Tab. 1) sind im Rahmen des Kernmodells auf etwa 5% genau. Die Korrektur der Termdifferenz 2p — 1s erweist sich bei den betrachteten Elementen als nahezu unabhängig von Z und beträgt etwa 5 keV.

Die Abschätzung eines Ebbe—Flut-Effektes ergab bei denselben Elementen für den 1s-Zustand im Vergleich zum Polarisationseffekt überraschend hohe Korrekturen (Tab. 2) von etwa 10 keV.

FITCH und RAINWATER [1] haben 1953 die Energie des 2p — 1s-Überganges beim μ^--Meson-Atom für verschiedene Elemente gemessen und dabei eine Genauigkeit von etwa 1% relativen Fehler erzielt. Höhere Übergänge wurden von DE BENEDETTI et al. [2] untersucht.

Bei der Berechnung der Energieterme des μ^--Meson-Atoms muß insbesondere beim 1s-Zustand der Einfluß der endlichen Ausdehnung des Atomkerns berücksichtigt werden, worauf schon 1949 von WHEELER [3] hingewiesen wurde. Er bewirkt z. B. bei Pb eine Änderung des 1s-Niveaus von — 20 MeV auf etwa — 11 MeV, während beim 2p-Zustand die Korrektur nur noch etwa 3% beträgt.

Weitere störende Einflüsse auf die Lage der Energieniveaus, deren Beiträge etwa in der Größenordnung der Meßgenauigkeit liegen, wurden von verschiedenen Autoren untersucht [1, 4, 5]. Eine Zusammenstellung der Ergebnisse findet sich bei HILL und FORD [6]. Im folgenden soll die Polarisationswirkung des Mesons auf den Kern genauer berechnet werden.

COOPER und HENLEY [4] haben auf Grund des Einteilchenmodells des Atomkerns eine Abschätzung des Polarisationseffektes angegeben, und zwar für den 1s-Zustand von $Z = 82$ $\Delta E_{1s} = -60$ keV. LAKIN und KOHN [7] fanden mit Hilfe des STEINWEDEL—JENSENschen Kernmodells für den 1s-Zustand von

[1] V. L. FITCH u. J. RAINWATER, Phys. Rev. **92**, 789 [1953].
[2] S. DE BENEDETTI et al., Phys. Rev. **94**, 766 [1954]; **97**, 240 [1955]. S. a. S. KOSLOV, V. L. FITCH u. J. RAINWATER, Phys. Rev. **95**, 625 [1954].
[3] J. A. WHEELER, Rev. Mod. Phys. **21**, 133 [1949].
[4] L. N. COOPER u. E. M. HENLEY, Phys. Rev. **92**, 801 [1953].
[5] H. C. CORBEN, Phys. Rev. **94**, 787 [1954].
[6] D. L. HILL u. K. W. FORD, Phys. Rev. **94**, 1619 [1954].
[7] W. LAKIN u. W. KOHN, Phys. Rev. **94**, 787 [1954].

$Z=80$ $\Delta E_{1s}=-16\pm 8$ keV und eine geringe Veränderlichkeit der Energiekorrektur mit der Ordnungszahl.

Durch Anwendung eines geeigneten Summationsverfahrens wird in der vorliegenden Arbeit eine Genauigkeit von etwa 5% im Rahmen des verwendeten STEINWEDEL–JENSENschen Kernmodells erzielt. Die Rechnung wird für mehrere Elemente durchgeführt, und das Problem auch für höhere Zustände behandelt, wobei sich zeigt, daß der Einfluß der Kernpolarisation beim 2p-Zustand, verglichen mit dem Einfluß beim 1s-Zustand, noch nicht vernachlässigbar klein ist.

Da das STEINWEDEL–JENSENsche Kernmodell der Natur seiner Voraussetzungen nach nicht in der Lage ist, Deformationen der Kernoberfläche wiederzugeben, wird der Beitrag eines Ebbe – Flut-Effektes mit Hilfe des Tröpfchenmodells gesondert berechnet, was sich verhältnismäßig kurz darstellen läßt, da die wesentlichen Überlegungen denen der vorhergehenden Abschnitte analog sind.

Allgemein wird die HAMILTON-Funktion des μ^--Meson-Atoms durch

$$H=H_{\mathrm{K}}+H_{\mu}+H_{\mathrm{W}}$$

gegeben, wo die HAMILTON-Funktion H_{K} des Kerns auf Grund des zugrunde gelegten Kernmodells berechnet werden muß. H_{μ} ist die HAMILTON-Funktion des freien μ^--Mesons, die nichtrelativistisch angenommen werden soll, da die Verwendung der DIRAC-Gleichung gegenüber der SCHRÖDINGER-Gleichung nur eine Termkorrektur um 2% ausmacht [4]. H_{W} bringt die Wechselwirkung zwischen Kern und Meson zum Ausdruck. Die Beschränkung auf elektrostatische Wechselwirkung bleibt im Rahmen der bei den Kernmodellen gemachten vernachlässigenden Annahmen.

Den Wechselwirkungsoperator H_{W} spaltet man zweckmäßigerweise in einen ungestörten Bestandteil, der die Wechselwirkung mit dem nichtangeregten Kern beschreibt, und in einen Störungsanteil auf, wodurch eine störungstheoretische Behandlung des Problems ermöglicht wird.

1. Die Hamilton-Funktion des Kerns

Unter Zugrundelegung des STEINWEDEL–JENSENschen Kernmodells [8], bei dem die Kernmaterie mit konstanter Gesamtdichte $\varrho=(\frac{4}{3}\pi r_0^3)^{-1}$ [Nukleonen pro cm^3] in eine festgehaltene Kugel mit dem Radius $R_0=r_0 A^{1/3}$ eingeschlossen ist, erhält man für die Störung $\eta(\mathfrak{R},t)$ der Protonendichte $(Z/A)\varrho+\eta$ die Differentialgleichung

$$\ddot{\eta}=u^2\,\Delta\eta\,,\qquad u^2=\frac{Z(A-Z)}{A^2}\,\frac{8K}{M_0}$$

($K=20$ MeV ist die Konstante des Asymmetrietermes der WEIZSÄCKER–BETHE-Formel, M_0 die Nukleonenmasse). Nach Abspaltung des Zeitanteils $e^{i\omega_{n,l}t}$ erhält man als Eigenfunktionen unter Benutzung der Randbedingung [8] $\partial\eta/\partial R=0$ für $R=R_0$

$$\eta_{n,l,m}(\mathfrak{R})=Y_{l,m}(\Theta,\Phi)\cdot\sqrt{\frac{2}{x}}\;\frac{j_{n,l}}{\sqrt{j_{n,l}^2-l(l+1)}}\cdot\frac{J_{l+1/2}(j_{n,l}\,x)}{J_{l+1/2}(j_{n,l})}\,.$$

Hierbei ist $x=R/R_0$, $Y_{l,m}$ sind normierte Kugelflächenfunktionen, $j_{n,l}=\omega_{n,l}\cdot R_0/u$ sind die positiven Nullstellen der Gleichung

$$j\,J_{l-1/2}(j)-(l+1)\,J_{l+1/2}(j)=0\,.$$

Mit der Entwicklung

$$\eta(\mathfrak{R},t)=\sum_{n,l,m}A_{n,l,m}(t)\;\eta_{n,l,m}(\mathfrak{R}) \tag{1}$$

und mit $A_{n,l,-m}=(-1)^m A^*_{n,l,m}$ erhält man für die potentielle Energie, abgesehen von einer additiven Konstanten,

$$U=\frac{4K}{\varrho}\int\eta^2\,d^3\mathfrak{R}=\frac{4K R_0^3}{\varrho}\sum_{n,l,m}A_{n,l,m}\,A^*_{n,l,m}\,. \tag{2}$$

Führt man die Differenz von Protonen- und Neutronengeschwindigkeit $\mathfrak{v}=\mathfrak{v}_{\mathrm{P}}-\mathfrak{v}_{\mathrm{N}}=\operatorname{grad}P$ ein, so kann der Ausdruck für die kinetische Energie,

$$T=\frac{M_0\varrho}{2}\,\frac{Z(A-Z)}{A^2}\int\mathfrak{v}^2\,d^3\mathfrak{R}\,,$$

bei dem höhere als quadratische Glieder in η und $\mathfrak{v}$ vernachlässigt sind, wegen verschwindender Radialkomponente von $\mathfrak{v}$ am Kernrand nach dem GREENschen Satz umgeformt werden:

$$T=-\frac{M_0\varrho}{2}\,\frac{Z(A-Z)}{A^2}\int P\,\Delta P\,d^3\mathfrak{R}\,.$$

Unter Benutzung der (linearisierten) Kontinuitätsgleichung [8]

$$\dot{\eta}+\varrho\frac{Z(A-Z)}{A^2}\,\Delta P=0$$

[8] H. STEINWEDEL u. J. H. D. JENSEN, Z. Naturforschg. **5a**, 413 [1950]; s. a. M. GOLDHABER u. E. TELLER, Phys. Rev. **74**, 1046 [1948].

erhält man

$$T = \frac{4\,K\,R_0^3}{\varrho} \sum_{n,l,m} \frac{1}{\omega_{n,l}^2}\, \dot{A}_{n,l,m}\, \dot{A}^*_{n,l,m}\,.$$

Die Quantisierung der Theorie kann nach dem Vorbild des harmonischen Oszillators vollzogen werden. Die Entwicklungskoeffizienten $A_{n,l,m}$ und $A^*_{n,l,m}$ werden danach als Operatoren umgedeutet, die den Vertauschungsrelationen

$$\frac{8\,K\,R_0^3}{\varrho}\left[\frac{A_{n,l,m}}{\omega_{n,l}}, \frac{\dot{A}_{n',l',m'}}{\omega_{n',l'}}\right] = i\,\hbar\,\delta_{n,n'}\,\delta_{l,l'}\,\delta_{m,m'}\,,$$

$$[A_{n,l,m}\,, A_{n',l',m'}] = [\dot{A}_{n,l,m}\,, \dot{A}_{n',l',m'}] = 0$$

genügen. Mit

$$\begin{aligned} A_{n,l,m} &= \frac{i^{-|m|}}{4}\sqrt{\frac{\hbar\,\omega_{n,l}\,\varrho}{K\,R_0^3}}\left(a_{n,l,m} + a^*_{n,l,-m}\right),\\ \dot{A}_{n,l,m} &= \frac{i^{-|m|}}{4\,i}\sqrt{\frac{\hbar\,\omega^3_{n,l}\,\varrho}{K\,R_0^3}}\left(a_{n,l,m} - a^*_{n,l,-m}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

und nach Weglassen einer (formal unendlichen) Nullpunktsenergie, wodurch der Grundzustand die Energie 0 erhält, wird die HAMILTON-Funktion

$$H_{\mathrm{K}} = T + U = \hbar \sum_{n,l,m} \omega_{n,l}\, a^*_{n,l,m}\, a_{n,l,m}\,,$$

wobei die $a^*_{n,l,m}$ und $a_{n,l,m}$ die Rolle von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren einer Gesamtheit von Bosonen spielen. Es gelten die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} \left[a_{n,l,m}\,, a^*_{n,l,m}\right] &= \delta_{n,n'}\,\delta_{l,l'}\,\delta_{m,m'}\,,\\ \left[a_{n,l,m}\,, a_{n',l',m'}\right] &= \left[a^*_{n',l',m'}\,, a^*_{n',l',m'}\right] = 0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Allgemein soll mit $|\,\mathfrak{R}\,\rangle$ ein Eigenzustand des Kerns bezeichnet werden. Ist insbesondere $|\,0\,\rangle$ der Grundzustand des Kerns, so sind die angeregten Zustände gegeben durch $a^*_{n,l,m}|\,0\,\rangle$, $a^*_{n,l,m}\,a^*_{n',l',m'}\,|\,0\,\rangle$ und so weiter.

2. Die elektrostatische Wechselwirkung des μ^--Mesons mit dem Kern

Es sei $\mathfrak{r}$ die Ortskoordinate des Mesons mit der Darstellung in Polarkoordinaten (r, ϑ, φ). Die elektrostatische Wechselwirkungsenergie

$$H_{\mathrm{W}} = -\,e^2 \int \mathrm{d}^3\mathfrak{R}\,\frac{\varrho\cdot(Z/A)+\eta}{|\,\mathfrak{R}-\mathfrak{r}\,|}$$

soll zerlegt werden in den ungestörten Bestandteil

$$H^0_{\mathrm{w}} = -\,e^2\,\varrho\,\frac{Z}{A}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{R}}{|\,\mathfrak{R}-\mathfrak{r}\,|} = -\frac{Z\,e^2}{R_0}\,C(r/R_0) = \begin{cases} -\dfrac{Z\,e^2}{r} & \text{für } r \geqq R_0\,,\\[2ex] -\dfrac{Z\,e^2}{R_0}\left[\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{R_0}\right)^2\right] & \text{für } r \leqq R_0\,, \end{cases} \tag{5}$$

der nur die statische Protonendichte $\varrho\cdot(Z/A)$ enthält, und in den Störunganteil

$$H^1_{\mathrm{w}} = -\,e^2\int \mathrm{d}^3\mathfrak{R}\cdot\frac{\eta(\mathfrak{R},t)}{|\,\mathfrak{R}-\mathfrak{r}\,|} = -\,e^2\int\mathrm{d}\Omega\int_0^{R_0} R^2\,\mathrm{d}R\,\frac{\eta(R,\Theta,\Phi;t)}{\sqrt{R^2+r^2-2\,R\,r\cos\alpha}}\,.$$

Hier ist α der Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{r}$.

Mit

$$f_l(x,y) = f_l(y,x) = \frac{x^l}{y^{l+1}} \quad (x \leqq y)$$

ergibt die Entwicklung der Wurzel nach Kugelfunktionen

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2\,R\,r\cos\alpha}} = 4\,\pi\sum_{l=0}^{\infty}\frac{f_l(r,R)}{2\,l+1}\sum_{m=-l}^{+l} Y^*_{l,m}(\Theta,\Phi)\,Y_{l,m}(\vartheta,\varphi). \tag{6}$$

Zusammen mit der Entwicklung (1) von η ergibt sich ausintegriert

$$H^1_{\mathrm{w}} = -\,4\,\pi\,e^2\,R_0^2\sum_{n,l,m}\frac{A_{n,l,m}\,Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)}{2\,l+1}\,C_{n,l}(r/R_0) \tag{7}$$

mit

$$C_{n,l}(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{J_{l+1/2}(j_{n,l})\sqrt{j^2_{n,l}-l(l+1)}}\left(\dfrac{2l+1}{j_{n,l}\sqrt{y}}\,J_{l+1/2}(j_{n,l}\,y) - y^l\,J_{l-1/2}(j_{n,l})\right) & \text{für } y \leqq 1\,,\\[2ex] \dfrac{C_{n,l}(1)}{y^{l+1}} & \text{für } y \geqq 1\,. \end{cases}$$

3. Störungsrechnung

Mit der HAMILTON-Funktion des freien Mesons

$$H_\mu = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{(\mathfrak{R})} = -\frac{\hbar^2}{2\mu R_0^2}\Delta_{(x)}$$

ist

$$(H_\mu + H_{\mathrm{K}} + H_{\mathrm{w}}^0)\,|\,\mathfrak{N}; n, l, m\,\rangle = (E_{n,l} + \Sigma\,\hbar\,\omega_{N,L})\,|\,\mathfrak{N}; n, l, m\rangle$$

die SCHRÖDINGER-Gleichung des ungestörten Problems. Die $E_{n,l}$ sind die Eigenwerte des Operators $H_\mu + H_{\mathrm{w}}^0$, die zugehörigen Eigenfunktionen $|\,0; n, l, m\,\rangle$ sind in der Ortsraumdarstellung gegeben durch

$$Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)\,\frac{\chi_{n,l}(r/R_0)}{r/R_0},$$

wo $\chi_{n,l}(x)$ der Differentialgleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 2\,\beta\,C(x) - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{2\,\mu\,R_0^2}{\hbar^2}E_{n,l}\right)\chi_{n,l}(x) = 0\,,$$

$$\beta = \frac{Z\,e^2\,\mu\,R_0}{\hbar^2} \qquad (8)$$

mit dem Potential der homogenen Ladungsverteilung $C(x)$ aus Gl. (5) genügt (μ = Masse des μ^--Mesons). Die $\chi_{n,l}$ sollen durch $\int_0^\infty \chi^2_{n,l}\,(x)\,\mathrm{d}x = 1$ normiert werden. Die Lösungen der Gl. (8) können explizit angegeben werden[4]; außerhalb des Kerns ($x \geqq 1$) sind sie durch WHITTAKERsche Funktionen darstellbar:

$$\chi_{n,l}(x) \sim W_{c_1,\,l+1/2}\left(\frac{2\,\beta}{c_1}\,x\right). \qquad (9)$$

Hierbei ist c_1^2 das Verhältnis der Energie des Mesons im Grundzustand bei punktförmigem Atomkern zur wirklichen Energie $E_{n,l}$

$$c_1^2\,E_{n,l} = -\frac{Z^2\,e^4\,\mu}{2\,\hbar^2}\,,$$

also für große Hauptquantenzahlen n asymptotisch $c_1 = c_1(n, l) \cong n$.

Numerische Werte der $\chi_{n,l}$ erhält man nach Gl. (9) für hinreichend großes Argument ($x \gg 1$) aus der asymptotischen Darstellung der WHITTAKERschen Funktionen. Für kleine x ist es rechentechnisch günstiger, direkt von der Differentialgleichung auszugehen *. Die Funktion $\chi_{1,0}$ wurde so durch numerische Integration der Differentialgl. (8) nach dem ADAMS–STÖRMERschen Verfahren bestimmt, wobei der Energieparameter c_1 iterativ verbessert wurde. Die Integration wurde nach fallendem Argument mit der Schrittweite $\Delta x = -1/20$ bzw. $-1/40$ vorgenommen. Als Kriterium für die Güte der Annäherung diente $\chi_{1,0}(0) = 0$.

Die Eigenfunktionen der höheren Zustände wurden approximativ durch Wasserstoff-Eigenfunktionen ersetzt.

In 2. störungstheoretischer Näherung (die 1. Näherung ergibt keinen Beitrag) ergibt sich für die Änderung $\Delta E_{n_0,l_0}$ des Energieeigenwertes E_{n_0,l_0}

$$\Delta E_{n_0,l_0} = \sum_{n,l,m}{}' \frac{|\langle\,\mathfrak{N}; n, l, m\,|\,H_{\mathrm{w}}^1\,|\,0; n_0, l_0, m_0\,\rangle|^2}{E_{n_0,l_0} - E_{n,l} - \Sigma\,\hbar\,\omega_{N,L}}\,. \qquad (10)$$

Man überzeugt sich leicht, daß alle Matrixelemente im Zähler von Gl. (10) verschwinden, es sei denn, daß $|\,\mathfrak{N}\,\rangle$ einen Zustand beschreibt, bei dem genau ein Kernquant angeregt ist. Es darf also statt $|\,\mathfrak{N}\,\rangle$ auch $|\,N, L, M\,\rangle = a^*_{N,L,M}|\,0\,\rangle$ geschrieben werden, und es entfällt das Summenzeichen im Nenner von Gl. (10). Mit H_{W}^1 aus (7) ergibt sich unter Verwendung von (3) und den Vertauschungsrelationen (4)

$$\Delta E_{n_0,l_0} = \frac{\pi^2\,e^4\,\hbar\,\varrho\,R_0}{K}\sum_{N,L}\frac{\omega_{N,L}}{(2\,L+1)^2}\sum_{n,l}\frac{1}{E_{n_0,l_0} - E_{n,l} - \hbar\,\omega_{N,L}} \cdot \left\{\int_0^\infty \chi_{n,l}(x)\,C_{N,L}(x)\,\chi_{n_0,l_0}(x)\,\mathrm{d}x\right\}^2 \sum_{M,m}\left|\int \mathrm{d}\omega\,Y^*_{l,m}\,Y_{L,-M}\,Y_{l_0,m_0}\right|^2. \qquad (11)$$

Vernachlässigt man im Energienenner der Gl. (11) E_{n_0,l_0} und $E_{n,l}$ gegenüber $\hbar\,\omega_{N,L}$, so folgt nach Summation über n, l und m

$$\Delta E^*_{n_0,l_0} = -\frac{\pi\,e^4\,\varrho\,R_0}{4\,K}\int_0^\infty \chi^2_{n_0,l_0}(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit } h(x) = \sum_{N,L}\frac{C^2{}_{N,L}(x)}{2L+1}\,. \qquad (12)$$

Das Potential $-\frac{\pi\,e^4\,\varrho\,R_0}{4\,K}\,h(r/R_0)$ erhält man auch klassisch als Minimum von $U + H_{\mathrm{w}}^1$ durch Variation der unquantisierten Größen $A_{n,l,m}$ [Gln. (2) und (7)].

* Den Hinweis darauf verdanke ich Frl. Dr. E. TREFFTZ.

Für die Funktion $h(x)$ erhält man

$$h(x) = \begin{cases} F(-1/2, 1; 3/2; x^2) - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{x^2}{2}\right)^2 & (0 \leqq x \leqq 1), \\ \dfrac{1}{3\,x^2}\left[F\left(1/2, 1; 5/2; \dfrac{1}{x^2}\right) - 1\right] & (x \geqq 1). \end{cases}$$

Die negativen Glieder rühren davon her, daß die $\eta_{n,l,m}$ erst nach Hinzufügen einer konstanten Funktion ein vollständiges Orthonormalsystem bilden.

Es ist $h(0) = 1/4$, $h(1) = 1/6$ und asymptotisch $h(x) \cong 1/15\,x^4$ $(x \to \infty)$. Die Funktion $h(x)$ besitzt am Kernrand $(x=1)$ eine senkrechte Tangente und nimmt etwa für $x = 0{,}68$ ein Maximum an $(=0{,}29)$.

Die Berechnung der Energiekorrektur mit Hilfe des klassischen Potentials nach Gl. (12) wird dann eine hinreichende Näherung darstellen, wenn sich der Kern während einer Zeit ΔT, die noch klein ist gegen die Umlaufszeit T des Mesons, in einem definierten Zustand befindet, d. h. $\Delta E \leqq \hbar\,\Delta\omega_{N,L}$ ist. Setzt man in der Unschärferelation $\Delta E \cdot \Delta T \approx \hbar$ für ΔE die Energie des ersten angeregten Zustandes $\hbar\,\omega_{1,1}$ ein, so ergibt sich (mit $T \approx 10^{-21}\,n^3$ sec, $\hbar\,\omega_{1,1} \approx 20$ MeV für $Z = 80$)

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\hbar}{T \cdot \Delta E} \approx \frac{3}{n^3}.$$

Daraus ist ersichtlich, daß für Hauptquantenzahlen $n \geqq 2$ Gl. (12) eine ausreichende Näherung darstellt. Numerisch ausgewertet wurde Gl. (12) für den 2p- und den 3d-Zustand (Tab. 1), da aus statistischen Gründen Zustände mit hohem Drehimpuls bevorzugt besetzt werden.

Wenn sowohl n als auch l hinreichend groß sind, läßt sich Gl. (12) noch weiter vereinfachen. Man kann dann $h(x)$ durch seinen asymptotischen Wert $1/15\,x^4$ ersetzen, wodurch sich ergibt

$$\Delta E^*_{n,l} = -\frac{2}{15}\,\frac{\pi\,e^4\,\varrho\,R_0}{4\,K}\,\beta^4 \cdot \frac{(n-l-1)!\,(2\,l-2)!}{(n+l)!\,n^5} \sum_{\varkappa=0}^{n-l-1} (\varkappa+1)^2\,(\varkappa+2)^2 \binom{n+l-\varkappa-3}{n-l-\varkappa-1}, \tag{13}$$

für maximalen Drehimpuls $l = n-1$ also insbesondere

$$\Delta E^*_{n,n-1} = -\frac{2}{15}\,\frac{\pi\,e^4\,\varrho\,R_0}{4\,K}\,\beta^4 \cdot \frac{4}{n^5(2\,n-1)\,(2\,n-2)\,(2\,n-3)} \approx -\frac{\pi\,e^4\,\varrho\,R_0\,\beta^4}{60\,K\,n^8}. \tag{14}$$

Ganz entsprechend der RITZschen Korrektur der modellmäßigen Atommechanik geht die Störung für festen Drehimpuls l mit n^{-3}, für maximalen Drehimpuls $l = n-1$ mit n^{-8} gegen Null.

Der Vergleich mit der Termverschiebung, die allein durch die endliche Ausdehnung des Kerns bewirkt wird

$$\Delta E^{(A)}_{n,l} = \frac{Z\,e^2}{R_0}\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - C(x)\right) \chi^2_{n,l}(x)\,dx$$

— für großes n und $l = n-1$ also insbesondere

$$\Delta E^{(A)}_{n,n-1} = \frac{Z\,e^2}{R_0}\,\frac{3}{4}\left(\frac{2\,\beta}{n}\right)^{2n+1} \frac{1}{n^2(2\,n+1)\,(2\,n+3)\,(2\,n-1)!}$$

— zeigt, daß für hinreichend großes n der Einfluß der Kernausdehnung durch die Polarisation überkompensiert wird.

Wenn $A = 2\,Z$ gesetzt wird, liest man aus Gl. (13) bei Beachtung der Definition (8) von β noch ab, daß der Gang des Polarisationseffektes proportional zu $Z^{5,67}$ ist. Für niedere Zustände ist der Exponent kleiner. Er beträgt 4,6 beim 2p-Zustand und 1,4 beim 1s-Zustand.

4. Die Störung des 1 s-Zustandes

Durch Spezialisation der Gl. (11) ergibt sich sofort

$$\Delta E_{1,0} = -\frac{\pi\,e^4\,\hbar\,\varrho\,R_0}{4\,K} \sum_{N,n,l} \frac{1}{2\,l+1}\,\frac{\omega_{N,l}}{-E_{1,0} + E_{n,l} + \hbar\,\omega_{N,l}} \left\{\int_0^\infty \chi_{n,l}(x)\,C_{N,l}(x)\,\chi_{1,0}(x)\,dx\right\}^2.$$

Einer direkten Auswertung der Summe steht ihre mäßige Konvergenz entgegen. Wird jedoch der Faktor $\dfrac{\omega_{N,l}}{-E_{1,0}+E_{n,l}+\hbar\,\omega_{N,l}}$ durch einen geeignet gewählten Mittelwert ersetzt, so erhält man $\Delta E_{1,0}$ in der Form von Gl. (12) mit einer Genauigkeit von etwa 30%. Durch Abspaltung ungünstig liegender Terme in der obigen Summe läßt sich diese Genauigkeit steigern, ohne den numerischen Aufwand allzusehr zu vermehren.

Dazu soll die Summe wie folgt umgeschrieben werden:

$$\sum_{N,n,l} = \sum_{\omega \geq \Omega} + \sum_{\substack{\omega < \Omega \\ \neq A}} + \sum_{A} .$$

In der ersten Teilsumme sind alle Terme aufgeführt, für die der erwähnte Faktor nahe an seinem asymptotischen Wert $1/\hbar$ liegt ($N \to \infty$). In der zweiten Summe liegt dieser Faktor in der Nähe einer von $1/\hbar$ weit abliegenden Häufungsstelle ($n \to \infty$); die 3. Summe umfaßt einzelne Ausnahmeterme, die sich in den beiden anderen noch nicht haben unterbringen lassen. Schätzt man nun in den beiden ersten Teilsummen obigen Faktor nach oben und unten ab, so gelangt man nach Summation über n, N und l, bzw. über n zu den Ausdrücken:

$$\sum \geqq \frac{\Omega}{-E_{1,0}+\hbar\,\Omega} \int_0^\infty h(x)\,\chi_{1,0}^2(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{\omega_{N,l}<\Omega} \frac{1}{2\,l+1} \left(\frac{\omega_{N,l}}{-E_{1,0}+\hbar\,\omega_{N,l}} - \frac{\Omega}{-E_{1,0}+\hbar\,\Omega} \right) \int_0^\infty C_{N,l}^2(x)\,\chi_{1,0}^2(x)\,\mathrm{d}x$$
$$+ \sum_A \frac{1}{2\,l+1} \left(\frac{\omega_{N,l}}{-E_{1,0}+E_{n,l}+\hbar\,\omega_{N,l}} - \frac{\omega_{N,l}}{-E_{1,0}+\hbar\,\omega_{N,l}} \right) \left\{ \int_0^\infty \chi_{n,l}(x)\,C_{N,l}(x)\,\chi_{1,0}(x)\,\mathrm{d}x \right\}^2,$$

$$\sum \leqq \frac{1}{\hbar} \int_0^\infty h(x)\,\chi_{1,0}^2(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{\omega_{N,l}<\Omega} \frac{1}{2\,l+1} \left(\frac{\omega_{N,l}}{-E_{1,0}+E_{n,l}^m+\hbar\,\omega_{N,l}} - \frac{1}{\hbar} \right) \int_0^\infty C_{N,l}^2(x)\,\chi_{1,0}^2(x)\,\mathrm{d}x$$
$$+ \sum_A \frac{1}{2\,l+1} \left(\frac{\omega_{N,l}}{-E_{1,0}+E_{n,l}+\hbar\,\omega_{N,l}} - \frac{\omega_{N,l}}{-E_{1,0}+E_{n,l}^m+\hbar\,\omega_{N,l}} \right) \left\{ \int_0^\infty \chi_{n,l}(x)\,C_{N,l}(x)\,\chi_{1,0}(x)\,\mathrm{d}x \right\}^2,$$

wo $-E_{n,l}^m$ der größte Wert ist, den $-E_{n,l}$ bei vorgegebenem l annehmen kann, wenn die Indizes keinen Wert von A anzeigen dürfen. Unter Berücksichtigung von insgesamt 17 Integralen erhält man die in Tab. 1 aufgeführten Zahlenwerte für $\Delta E_{1,0}$, die im Rahmen des Kernmodells auf etwa 5% genau sind.

Element	$\Delta E_{1,0}$	$\Delta E_{2,1}$	$\Delta E_{3,2}$
Sb	$-4{,}2 \pm 0{,}1$ keV	$-0{,}28$ keV	($-0{,}01$ keV)
W	$-7{,}2 \pm 0{,}3$	$-1{,}7$	($-0{,}04$)
Pb	$-8{,}2 \pm 0{,}4$	$-2{,}7 \pm 0{,}1$	$-0{,}1$
U	$-9{,}8 \pm 0{,}5$	$-4{,}3 \pm 0{,}2$	$-0{,}2$

Tab. 1. Die Störung der 1s-, 2p- und 3d-Energieniveaus beim μ^--Meson-Atom durch Polarisation des Atomkerns. ($r_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13}$ cm, $K = 20$ MeV.) Die eingeklammerten Zahlen sind nach Gl. (14) berechnet.

Dabei verursacht ein induziertes Dipolmoment etwa 2/7 der Termkorrekturen, kugelsymmetrische Pulsationen etwa 1/12, der Rest entfällt auf höhere Anregungszustände des Kerns.

Beim 2p-Zustand liefert eine ähnliche Rechnung eine Bestätigung der Näherungsformel (12) und ergibt die bei Pb und U angegebenen Fehlerschranken.

5. Der Einfluß der Oberflächenschwingungen des Kerns (Ebbe–Flut-Effekt)

In bezug auf die Rückwirkung des Mesons auf den Kern ist unter den Voraussetzungen des Steinwedel–Jensenschen Kernmodells am einschneidendsten die Annahme einer starren Oberfläche. In Wirklichkeit wird ein Meson, das sich nahe am Kern befindet, an der Oberfläche des Kerns eine Ebbe – Flut-Bewegung hervorrufen, deren Einfluß auf die Energieniveaus des μ^--Meson-Atoms nunmehr abgeschätzt werden soll. Es wird also nun der Kernrand örtlich und zeitlich veränderlich angenommen

$$R(\Theta, \Phi; t) = R_0 + \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} A_{L,M}(t)\,Y_{L,M}(\Theta, \Phi), \tag{15}$$

jedoch die neue Annahme gemacht, daß nicht nur die Gesamtdichte der Nukleonen, sondern sogar Protonen- und Neutronendichte für sich im Innern des Kerns konstant seien.

Unter der Annahme, daß die Anregungsenergie des Kerns proportional zur Oberflächenvergrößerung sei, sind die Eigenschwingungen des Kerns von verschiedenen Autoren[9] berechnet worden. Für die

[9] S. Flügge, Ann. Phys., Lpz. (5) **39**, 373 [1941]; M. Fierz, Helv. Phys. Acta **16**, 365 [1943].

Resonanzfrequenzen gilt

$$\omega_L{}^2 = \frac{\sigma}{M_0\,\varrho\,R_0{}^3}\,L(L-1)\,(L+2)\,,$$

wobei die Oberflächenspannung

$$\sigma = \Gamma \cdot \frac{A^{2/3}}{4\,\pi\,R_0{}^2}$$

aus der v. WEIZSÄCKER–BETHE-Formel entnommen werden kann. Nach der Quantisierung erhält man für die HAMILTON-Funktion

$$H_{\mathrm{K}} = \hbar \sum_{L=2}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} \omega_L\, a^*_{L,M}\, a_{L,M}\,,$$

wobei zwischen den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_{L,M}$ und $a^*_{L,M}$ und den Entwicklungskoeffizienten $A_{L,M}$ die Beziehung besteht

$$A_{L,M} = i^{-|M|} \sqrt{\frac{L\,\hbar}{2\,\omega_L\,M_0\,\varrho\,R_0{}^3}}\,\left(a_{L,M} + a^*_{L,-M}\right).$$

Wie es nach Gl. (15) sein muß, haben die $A_{L,M}$ die Dimension einer Länge.

Mit der konstanten Ladungsdichte $e\cdot(\varrho\,Z/A)$ wird die elektrostatische Wechselwirkung gegeben durch

$$H_{\mathrm{W}} = -e^2\,\frac{\varrho\,Z}{A}\,\frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{R}}{|\mathfrak{R}-\mathrm{r}|}\,,$$

wobei das Integral über das gesamte, zeitlich veränderliche Kernvolumen zu erstrecken ist. Nach Abspalten des ungestörten Anteils

$$H^0_{\mathrm{w}} = -\frac{Z\,e^2}{R_0}\,C(r/R_0)$$

bleibt die Störung

$$H^1_{\mathrm{w}} = -e^2\,\frac{\varrho Z}{A} \int \mathrm{d}\Omega \int_{R_0}^{R(\Theta,\Phi;t)} \frac{R^2\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2+r^2-2\,R\,r\cos\alpha}}$$

zu berechnen. Dazu soll der Integrand in eine TAYLOR-Reihe um R_0 entwickelt werden, was einer Approximation der Deformation des Kerns durch eine Folge von Multipolschichten an der ungestörten Kernoberfläche entspricht. Im Rahmen einer Störungstheorie 2. Ordnung genügt es, nur das konstante Glied mitzunehmen

$$H^1_{\mathrm{w}} = -e^2\,\frac{\varrho Z}{A} \int \mathrm{d}\Omega\, \frac{R_0{}^2[R(\Theta,\Phi;t)-R_0]}{\sqrt{R_0{}^2+r^2-2\,R_0\,r\cos\alpha}}\,,$$

wobei die Kerndeformation also durch eine Oberflächenladung approximiert wird. Das Integral läßt sich mit Hilfe von Gl. (6) auswerten:

$$H^1_{\mathrm{w}} = -4\,\pi\,e^2\,\frac{\varrho Z}{A} R_0 \cdot \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{f_l(r,R_0)}{2\,l+1}\,A_{l,m}\,Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)\,. \tag{16}$$

Ist

$$|\,L,M;n,l,m\,\rangle = \frac{\chi_{n,l}(x)}{x}\,Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)\,a^*_{L,M}\,|\,0\,\rangle$$

ein Zustand des ungestörten Systems mit der HAMILTON-Funktion $H_{\mathrm{K}} + H_\mu + H^0_{\mathrm{w}}$, so ergibt sich in zweiter störungstheoretischer Näherung für die Änderung der Energieterme durch H^1_{w}

$$\Delta E_{n_0,l_0} = \sum_{L,M;n,l,m} \frac{|\langle\, L,M;n,l,m\,|\,H^1_{\mathrm{w}}\,|\,0,0;n_0,l_0,m_0\,\rangle|^2}{E_{n_0,l_0}-E_{n,l}-\hbar\,\omega_L}\,,$$

wobei die Summe über L erst von $L=2$ an zu erstrecken ist ($L=0$ ergibt als Grundzustand des Kerns keinen Beitrag, $L=1$ entspricht einer bloßen Translation des Kerns und ergibt wegen $\omega_1=0$ keinen Beitrag). Nach Einsetzen von (16) ergibt sich

$$\Delta E_{n_0,l_0} = \frac{9}{2}\,\frac{Z^2\,e^4}{\sigma\,R_0{}^4} \sum_{L;n,l} \frac{1}{(2\,L+1)^2\,(L-1)\,(L+2)}\,\frac{\hbar\,\omega_L}{E_{n_0,l_0}-E_{n,l}-\hbar\,\omega_L} \cdot \left\{\int_0^\infty \chi_{n,l}\,f_L(x,1)\,\chi_{n_0,l_0}(x)\,\mathrm{d}x\right\}^2 \sum_{m,M} \left|\int \mathrm{d}\omega\,Y^*_{l,m}\,Y_{L,-M}\,Y_{l_0,m_0}\right|^2. \tag{17}$$

Für das Potential erhält man klassisch oder durch Vernachlässigung von E_{n_0,l_0}, $E_{n,l}$ in (17)

$$-\frac{9}{8\,\pi}\,\frac{Z^2\,e^4}{\sigma\,R_0{}^4}\,h_1(r/R_0)$$

mit

$$h_1(x) = x^{-2}\,h_1(1/x) = \sum_{L=2}^{\infty} \frac{x^{2L}}{(2\,L+1)\,(L-1)\,(L+2)} \qquad (0 \leqq x \leqq 1)\,. \tag{18}$$

Eine brauchbare Näherung für $h_1(x)$ ist im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$

$$h_1(x) \approx \frac{x^4}{20} + 0{,}030\,75\,x^8$$

mit einem Fehler kleiner als 4%. Asymptotisch gilt

$$h_1(x) \cong \frac{1}{20}\,x^{-6} \qquad (x \to \infty)\,.$$

Unter Zugrundelegung des Potentials (18) und zweier weiterer Integrale wurde Gl. (17) für den 1s-Zustand nach dem in Abschnitt 4 erläuterten Summationsverfahren ausgewertet. Dabei wurde für die Konstante Γ der v. WEIZSÄCKER–BETHE-Formel der ältere Wert $\Gamma = 14$ MeV sowie $\Gamma = 18{,}5$ MeV [10] zugrunde gelegt. Die Ergebnisse sind in Tab. 2 eingetragen. Das flache Minimum zwischen W und Pb erklärt sich dadurch, daß bei hohen Ordnungszahlen das Maximum der 1s-Wellenfunktion ins Innere des Kerns zu liegen kommt. Im Falle der Polarisation ist ein ähnlicher Effekt erst in der Termdifferenz 2p – 1s bemerkbar. Die im Vergleich zur Polarisationskorrektur überraschend hohen Werte werden etwa zur Hälfte durch ein induziertes Quadrupolmoment verursacht.

Für höhere Zustände ergibt sich etwa für $L = 6$ eine Resonanzstelle des Energienenners. Eine Berechnung der Energiekorrektur mit Hilfe des Tröpfchenmodells scheint hier wenig geeignet.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind mit

$$r_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13}\ \text{cm}$$

gewonnen worden.

Element	$\Delta E_{1,0}$ $\Gamma = 14$ MeV	$\Delta E_{1,0}$ $\Gamma = 18{,}5$ MeV
Sb	$-11{,}0 \pm 0{,}9$ keV	$-8{,}9 \pm 0{,}7$ keV
W	$-12{,}8 \pm 2{,}0$	$-10{,}5 \pm 1{,}5$
Pb	$-12{,}8 \pm 2{,}3$	$-10{,}5 \pm 1{,}7$
U	$-12{,}5 \pm 2{,}7$	$-10{,}3 \pm 2{,}0$

Tab. 2. Die Störung des 1s-Zustandes durch den Ebbe–Flut-Effekt ($r_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13}$ cm).

Nach FITCH und RAINWATER [1] entspricht bei Pb eine Änderung des Kernradius $r_0\,A^{1/3}$ um 1% einer Änderung der berechneten Übergangsenergie (6 MeV) um 1%. Um eine Korrektur der Übergangsenergie von 15 keV durch eine Änderung des Kernradius zu kompensieren, müßte dieser also um 0,25%, d. h. r_0 um $0{,}003 \cdot 10^{-13}$ cm erhöht werden.

Eine Kopplung zwischen Oberflächenschwingungen und Polarisationsschwingungen wurde nicht berücksichtigt, da sich die niedrigsten Eigenfrequenzen der beiden Schwingungszustände etwa um eine Zehnerpotenz unterscheiden.

Danken möchte ich Herrn Prof. Dr. W. HEISENBERG für die freundliche Aufnahme im Max-Planck-Institut für Physik, für die Anregung zu dieser Arbeit und sein förderndes Interesse an ihr, sowie Herrn Prof. Dr. L. BIERMANN für die Möglichkeit, die numerischen Rechnungen an der elektronischen Rechenmaschine G 1 durchzuführen.

[10] A. E. S. GREEN, Phys. Rev. 95, 1006 [1954].

Intensitätsarme Übergänge beim Zerfall von RaC, RaC'' und ThC''

Von H. DANIEL

Aus dem Institut für Physik im Max-Planck-Institut für medizinische Forschung, Heidelberg

(Z. Naturforschg. **12 a**, 194—200 [1957]; eingegangen am 16. Januar 1957)

An anthracene scintillation counter with single-channel pulse height selection was used as a low-background detector in a magnetic-lens β-ray spectrometer. By analyzing the spectrum of the Compton electrons ejected from a thick converter three new γ-rays in the decay RaC → RaC' were found: 2.72 ± 0.02 MeV, 2.89 ± 0.05 MeV, and 3.03 ± 0.03 MeV, with intensities of 0.026, 0.005, and 0.013, resp., setting the intensity of the 2.204-MeV γ-ray equal to unity. β-ray groups, if existing, from RaC'' to RaD-levels ≤ 1.07 MeV have an intensity $< 5 \cdot 10^{-3}$ per RaC'' decay. The upper limit for the intensity of a 3.20-MeV crossover γ-ray in the decay ThC'' → ThD was measured to $1.5 \cdot 10^{-4}$ per ThC'' decay.

1. Ziel der Untersuchung

Die Verwendung eines Szintillationszählers als Detektor in einem magnetischen β-Spektrometer erlaubt im Vergleich mit einem Auslösezähler neben größeren Zählraten eine zusätzliche Energiediskriminierung. Dadurch kann der Untergrund beträchtlich reduziert werden.

Zweck der vorliegenden Arbeit war es, diese Methode auf einige Beispiele anzuwenden. Es wurde